

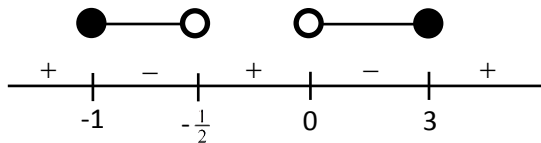
# เฉลยข้อสอบ 7 วิชาสามัญ ปีการศึกษา 2556

ตอนที่ 1 แบบบรรยายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ตอบ 4

$$\text{จากอสมการ } \frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+1)} \leq 0$$

สามารถเขียนเส้นจำนวนได้ดังรูป



ดังนั้นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับอสมการดังกล่าวมี 4 จำนวนคือ  $-1, 1, 2, 3$  นั่นเอง

## หลักในการแก้สมการพหุนาม

1. ทำให้ข้างใดข้างหนึ่งเป็น 0
  2. ทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังมากที่สุดเป็น +
  3. แยกตัวประกอบ
  4. เขียนเส้นจำนวน
- \*\* ระวัง!!! ค่า  $x$  ที่ทำให้ส่วนเป็น 0 ต้องเป็นช่วงเปิด

2. ตอบ 25

จากที่เรารู้ว่า  $2i$  เป็นคำตอบของสมการ  $P(x) = 0$

$\therefore -2i$  จะเป็นคำตอบของสมการ  $P(x) = 0$  ด้วย

เนื่องจาก  $P(x)$  เป็นพหุนามกำลัง 3 ดังนั้นจะต้อง

มีคำตอบของสมการ  $P(x) = 0$  อีกคำตอบหนึ่งด้วย

สมมติให้ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งคือ  $mx + n$

นั่นคือ  $P(x) = (x - 2i)(x + 2i)(mx + n)$

ดังนั้น  $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 12 = (x^2 - 4i^2)(mx + n) = (x^2 + 4)(mx + n)$

• เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ  $x^3$  เลยทำให้เราได้ว่า  $m = 2$

• เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ค่าคงที่พจน์สุดท้าย เลยทำให้เราได้ว่า  $n = 3$

สรุป :  $P(x) = (x - 2i)(x + 2i)(2x + 3) = (x^2 + 4)(2x + 3)$

ดังนั้น  $P(1) = (1 + 4)(2 + 3) = 25$

## ทฤษฎีที่เกี่ยวกับรากของสมการพหุนาม

กำหนดให้  $P(x)$  เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์

เป็นจำนวนเต็ม หากเรารู้ว่าจำนวนเชิงซ้อน  $z$  เป็น

คำตอบของสมการ  $P(x) = 0$  แล้ว เราจะได้ว่า

$\bar{z}$  จะเป็นคำตอบของสมการ  $P(x) = 0$  ด้วย ^^

3. ตอบ 0.75

จาก  $2b = 3a$  จะได้ว่า  $b = \frac{3}{2}a$

จากกฎของไซน์  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$  จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 2A}{\frac{3}{2}a} \quad \text{นั่นคือ} \quad \sin A = \frac{\sin 2A}{\frac{3}{2}}$$

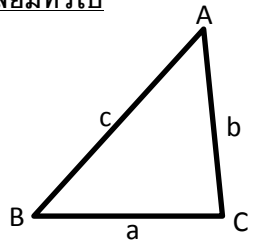
แต่จาก  $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{3}{2} \sin A = 2 \sin A \cos A$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \cos A = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{นั่นเอง}$$

**กฎของไซน์สำหรับสามเหลี่ยมทั่วไป**

สามเหลี่ยม ABC ที่มี  
ความยาวด้านตรงข้าม  
มุม A, B, C คือ a, b, c  
ตามลำดับ เราจะได้ว่า



กฎของไซน์ คือ  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

**หมายเหตุ :**  $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$  นะครับ :))

4. ตอบ 8

$$\text{จาก} \quad (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} &= (-\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \\ &= (-\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) \\ &= (-1)(2) + (-2)(1) + (-4)(-3) \\ &= 8 \end{aligned}$$

**ความสัมพันธ์ระหว่างการ dot และการ cross**

สำหรับเวกเตอร์  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  ใดๆ เราจะได้ว่า

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$$

(นั่นคือ เวกเตอร์สามารถเลื่อนไปทางขวาได้ 1 ตำแหน่ง  
ทั้ง 3 เวกเตอร์ในทางเดียวกันในทำนองว่าเป็น loop  
โดยที่เครื่องหมาย  $\cdot$  และเครื่องหมาย  $\times$  ยังต้องอยู่ที่เดิม)

**หมายเหตุ**

1. สำหรับเวกเตอร์  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ใดๆ เราจะได้ว่า  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2. ถ้า  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  และ  $\vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$  จะได้ว่า  $\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$

**ความรู้เพิ่มเติม 1 : ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการดำเนินการตามแถว**

การดำเนินการตามแถว (Row Operation) คือกระบวนการที่เราจะปรับรูปแบบของเมทริกซ์เพื่อให้ได้เมทริกซ์ใหม่ที่สะดวกต่อการคำนวณมากขึ้น มีอยู่ด้วยกัน 3 ลักษณะคือ

1. คูณแถวที่  $i$  ด้วยค่าคงที่  $k$  (เมื่อ  $k \neq 0$ ) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $kR_i$
2. สลับแถวที่  $i$  กับแถวที่  $j$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $R_{ij}$
3. คูณแถวที่  $i$  ด้วยค่าคงที่  $k$  (เมื่อ  $k \neq 0$ ) แล้วนำไปบวกกับแถวที่  $j$  (แถวที่  $j$  จะเปลี่ยนแปลง) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $kR_i + R_j$

โดยเราจะใช้เครื่องหมาย  $\sim$  แทนการดำเนินการตามแถวในแต่ละขั้นตอน และเขียนกำกับไว้ทุกขั้นตอน

เช่น กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

• ถ้าเมทริกซ์  $A \sim B$  โดยการดำเนินการ  $-2R_3$  จะได้ว่า  $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} -2R_3$

• ถ้าเมทริกซ์  $B \sim C$  โดยการดำเนินการ  $2R_1 + R_2$  จะได้ว่า  $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} 2R_1 + R_2$

• ถ้าเมทริกซ์  $C \sim D$  โดยการดำเนินการ  $R_{23}$  จะได้ว่า  $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & -8 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix} R_{23}$

## ความรู้เพิ่มเติม 2 : การแก้ระบบสมการด้วยการดำเนินการตามแถว

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \mathbf{b}_1$$

จากระบบสมการ  $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \mathbf{b}_2$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \mathbf{b}_3$$

เราสามารถเขียนเป็นเมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) ได้เป็น  $\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathbf{b}_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \mathbf{b}_3 \end{array} \right]$

ซึ่งไม่ว่าเราจะใช้การดำเนินการตามแถวทั้ง 3 แบบที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น กับเมทริกซ์แต่งเติมนี้  
อย่างไรก็ตาม เราจะได้ว่า คำตอบของระบบสมการจะไม่เปลี่ยนแปลง

5. ตอบ 17

จากระบบสมการที่โจทย์กำหนดให้  $\begin{cases} x - 2y + 3z = a \\ x - 3y = b \\ 2x - 5y + 5z = c \end{cases}$  เขียนเป็นเมทริกซ์ได้เป็น  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & -3 & 0 & b \\ 2 & -5 & 5 & c \end{array} \right]$

แต่โจทย์กำหนดให้  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & -3 & 0 & b \\ 2 & -5 & 5 & c \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$  แสดงว่าระบบสมการจะไม่เปลี่ยนแปลง

ซึ่งจาก  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$  จะทำให้เราได้ว่า  $z = 2$ ,  $y + 3z = 5$  และ  $x - 2y + 3z = 9$

นั่นคือ  $x = 1$ ,  $y = -1$  และ  $z = 2$

ซึ่งจากโจทย์จะได้ว่า  $c = 2x - 5y + 5z = 2(1) - 5(-1) + 5(2) = 17$

6. ตอบ 12

$$\begin{aligned}
& (\log_7 625)(\log_5 343) \\
&= \frac{\log 625}{\log 7} \times \frac{\log 343}{\log 5} \\
&= \frac{\log 5^4}{\log 7} \times \frac{\log 7^3}{\log 5} \\
&= \frac{4\log 5}{\log 7} \times \frac{3\log 7}{\log 5} = 12
\end{aligned}$$

**สมบัติของ log สำหรับข้อนี้**

กำหนดให้  $x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

และ  $n$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

1.  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$  เมื่อ  $b$  คือฐาน log ใหม่ที่ต้องการ

2.  $\log_a x^n = n \log_a x$

7. ตอบ 0.20

จากตารางที่กำหนดให้ ต้องการความถี่

จากความถี่สะสมก่อน ดังตาราง

ดังนั้นนักเรียนทั้งหมดมี 200 คน

และมีนักเรียนที่สอบได้คะแนนในช่วง

50-59 คะแนนทั้งหมด 40 คน

ดังนั้น เมื่อสุ่มนักเรียนมา 1 คน

ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่ได้

คะแนนสอบ	ความถี่สะสม (คน)	ความถี่
10 - 19	10	10
20 - 29	35	25
30 - 39	80	45
40 - 49	145	65
50 - 59	185	40
60 - 69	195	10
70 ขึ้นไป	200	5

คะแนนสอบในช่วง 50-59 คะแนน เท่ากับ  $\frac{40}{200} = 0.20$

8. ตอบ 720

โจทย์กำหนดให้เลข 3 ทั้งสองตัวต้องอยู่ติดกัน

เราจึงต้องมัดเลข 3 ทั้ง 2 ตัวไว้ด้วยกัน ดังนี้

$$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3,3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}$$

ดังนั้นการสร้างจำนวนที่มี 7 หลัก จากเลขโดด

7 ตัว ดังกล่าว ก็คือการสลับของที่แตกต่างกัน

ทั้งหมด 6 ชั้นนั่นเอง ซึ่งสามารถทำได้

$$6! = 720 \text{ วิธี นั่นเอง}$$

**หลักการพื้นฐานของการเรียงของติดกัน**

หากเราต้องการให้สิ่งของใดอยู่ติดกัน ให้มัดรวมของเหล่านั้น

อยู่ด้วยกัน แล้วนับว่าเป็นของเพียง 1 ชิ้น และอย่าลืมคิด

ด้วยว่า ของที่เรามัดอยู่ติดกันนั้นสามารถสลับตำแหน่งกัน

ได้ด้วย **ยกเว้น!!!** ของที่เรามัดติดกันนั้นมันเหมือนกัน

เพราะของเหมือนกันสลับที่กันไม่ทำให้เกิดวิธีใหม่ะครับ^^

9. ตอบ 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{n^2+2} - \frac{n^2}{n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3(n+3) - n^2(n^2+2)}{(n^2+2)(n+3)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4 + 3n^3 - n^4 - 2n^2}{n^3 + 3n^2 + 2n + 6} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^3 - 2n^2}{n^3 + 3n^2 + 2n + 6} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3}} \right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

**หลักการพื้นฐานของการหาขีดจำกัดของลำดับ**  
 ให้ดูดีกรีที่มากที่สุดของเศษและส่วน

1. ถ้า เศษ < ส่วน : ลิมิตจะตอบ 0  
 เช่น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n^2-3} = 0$
2. ถ้า เศษ > ส่วน : ลิมิตจะตอบไม่มีค่า(เป็นจำนวนจริง)  
 เช่น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-5n+1}{n^2+4n+10} = \text{ไม่มีค่า}$
3. ถ้า เศษ = ส่วน : ลิมิตจะตอบค่าส.ป.ส. เศษ ÷ ส่วน  
 เช่น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-9n+18}{2n^2+6n-11} = \frac{5}{2}$

**หมายเหตุ :** ถ้าเป็น 'ไม่มีค่า'—'ไม่มีค่า' จะยังสรุปไม่ได้  
 ต้องจัดรูปใหม่ก่อนเสมอ แล้วจึงหาค่าของลิมิตใหม่อีกครั้ง

10. ตอบ 12

จาก  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$   
 จะได้ว่า  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$   
 ให้  $f'(x) = 0$  เพื่อหาค่าวิกฤต  
 จะได้ว่า  $3(x^2 + 2x - 3) = 0$   
 นั่นคือ  $(x+3)(x-1) = 0$   
 $\therefore x = -3$  หรือ  $x = 1$   
 แต่ต้องระวัง !!! เพราะข้อนี้โจทย์  
 กำหนดให้เราพิจารณาในช่วง  $[-1, 2]$   
 ดังนั้นค่าวิกฤตจึงคิดเฉพาะ  $x = 1$   
 เพราะว่า  $f(1) = -4$  ,  $f(-1) = 12$  และ  $f(2) = 3$   
 ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  บนช่วง  $[-1, 2]$  มีค่าเท่ากับ 12

**หลักการพื้นฐานของการหาสุดขีดสัมบูรณ์**  
 ในการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ  $f$  บนช่วง  $[a, b]$

**ขั้นที่ 1 :** หาค่าวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน  $f$  โดยหา  
 ได้จาก  $f'(x) = 0$  แต่จะพิจารณาเฉพาะ  
 ค่าวิกฤตที่อยู่ในช่วง  $[a, b]$  เท่านั้นนะครับ

**ขั้นที่ 2 :** หาค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่งค่าวิกฤต

**ขั้นที่ 3 :** หาค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง  $x = a$  และ  $x = b$

**ขั้นที่ 4 :** เปรียบเทียบค่าที่ได้จากขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3

ค่าที่มากที่สุด = ค่าสูงสุดสัมบูรณ์  
 ค่าที่น้อยที่สุด = ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์