

1. ถ้าเซตคำตอบของอสมการ $|3-2x| - |3x-7| \geq 0$ คือช่วง $[a,b]$
แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

พิจารณาแบ่งย่านค่าของ x จาก $3-2x=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$, $3x-7=0 \rightarrow x=\frac{7}{3}$ เป็น 3 ย่าน

$$1. \quad x < \frac{3}{2}: \quad |3-2x| - |3x-7| \geq 0 \rightarrow 3-2x - (3x-7) \geq 0 \rightarrow 3-2x-3x+7 \geq 0 \rightarrow 10-5x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$$

$$2. \quad \frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{3}: \quad |3-2x| - |3x-7| \geq 0 \rightarrow -(3-2x) + (3x-7) \geq 0 \rightarrow -3+2x+3x-7 \geq 0 \rightarrow 5x-10 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow 2 \leq x < \frac{7}{3}$$

$$3. \quad x \geq \frac{7}{3}: \quad |3-2x| - |3x-7| \geq 0 \rightarrow 2x-3 - (3x-7) \geq 0 \rightarrow 2x-3-3x+7 \geq 0 \rightarrow -x+4 \geq 0 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow \frac{7}{3} \leq x \leq 4$$

จากย่าน 2. และ 3. ได้ผลรวมของค่า x โดยการ union กันได้ย่านต่อเนื่องเป็น $[2,4]$ ดังนั้น

$$[a,b]=[2,4] \quad a+b=2+4=6 \quad \text{ตอบ } 6$$

2. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนนับ n ซึ่ง ค.ร.น. ของ 720 และ n มีค่าเท่ากับ 10800
แล้วสมาชิกของ S ที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

ค.ร.น. ของเลข 2 จำนวน n และ $720 = 10800$

$$10800 = 8 \times 1350 = 8 \times 25 \times 54 = 8 \times 25 \times 2 \times 27 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$$

$$720 = 9 \times 80 = 9 \times 16 \times 5 = 3^2 \times 2^4 \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \quad \text{ดังนั้น}$$

$$n = 3^3 \times 5^2 = 3 \times 15^2 = 3 \times 225 = 675$$

ตอบ 675

3. $\sec^2(2 \tan^{-1} \sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$\sec^2(2 \tan^{-1} \sqrt{2}) = 1 + \tan^2(2 \tan^{-1} \sqrt{2}) = 1 + \left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2})^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{1-2} \right)^2 = 1 + 8 = 9$$

ตอบ 9

4. กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิด $A = (1, -4, -3)$ และ $B = (3, -6, 2)$

ถ้า C เป็นจุดบน OB ซึ่งทำให้ AC ตั้งฉากกับ OB แล้ว OC ยาวเท่าใด

เนื่องจาก C เป็นจุดบน OB ดังนั้น OC มี vector ทิศทางเดียวกัน แต่ขนาดต่างกัน และสามารถกำหนดจุด $C = (3m, -6m, 2m)$ ได้

OC ตั้งฉากกับ AC ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} 0 &= OC \cdot AC = m \cdot OB \cdot AC = (3mi - 6mj + 2mk) \cdot [(3m-1)i + (-6m+4)j + (2m-2)k] \\ &= 3m(3m-1) + (-6m)(-6m+4) + (2m)(2m-2) \\ &= (9m^2 - 3m) + (36m^2 - 24m) + (4m^2 - 4m) = 49m^2 - 31m = m(7m - 3) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } m = \frac{3}{7} \cdot \text{ดังนั้น } |OC| = m |OB| = \frac{3}{7} \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \frac{3}{7} \sqrt{9 + 36 + 4} = 3$$

5. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $3^x + 3^{2-x} = 4\sqrt{3}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$3^x + 3^{2-x} = 4\sqrt{3} \rightarrow 3^{2x} + 3^2 = 4\sqrt{3} \times 3^x \rightarrow$$

$$3^{2x} - 4\sqrt{3} \times 3^x + 9 = 0$$

$$(3^x - 3\sqrt{3})(3^x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow 3^x = \sqrt{3}, 3\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \text{ ตอบ } \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

6. ถ้า $\log \left[x + 27^{\log_3 2} \right] = 1$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

$$\log(x + 27^{\log_3 2}) = 1 = \log 10^1 \rightarrow 10 = x + 27^{\log_3 2} = x + 3^{3 \log_3 2} = x + 3^{\log_3 2^3} = x + 2^3 = x + 8 \rightarrow x = 2$$

ตอบ 2

7. ในการกระจาย $\left(x^2 + \frac{2}{x^3} \right)^{10}$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

จะได้ว่าพจน์ค่าคงตัวมีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

พจน์ที่ $r+1 =$

$$\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{10} = (x^2)^{10} + 10(x^2)^{10-1}\left(\frac{2}{x^3}\right) + \dots + \binom{10}{r}(x^2)^{10-r}\left(\frac{2}{x^3}\right)^r$$

$$\binom{10}{r}(x^2)^{10-r}\left(\frac{2}{x^3}\right)^r = 2^r \binom{10}{r} x^{20-5r} \rightarrow 20-5r=0 \rightarrow r=4 \rightarrow 2^4 \binom{10}{4} = 16 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} = 3360$$

นั่นคือพจน์ที่ 5 จะมี x^0 และมีค่า 3360 ตอบ **3360**

8. ในการสอบวิชาประวัติศาสตร์ มีการสอบ 5 ครั้ง โดยที่อาจารย์ผู้สอนให้น้ำหนักของผลการสอบครั้งสุดท้ายเป็นสองเท่าของผลการสอบครั้งอื่น ในการสอบสี่ครั้งแรก เด็กชายพลสอบได้คะแนนเฉลี่ย 86 เปอร์เซนต์ ถ้าเขาต้องการผลการสอบวิชานี้เป็น 90 เปอร์เซนต์แล้วเขาจะต้องได้คะแนนในการสอบครั้งที่ 5 เท่ากับกี่เปอร์เซนต์

ถ้าการสอบครั้งที่ 5 ต้องได้ $x\%$

$$\text{เปอร์เซนต์สอบเฉลี่ย } 90\% = \frac{86\% \times 4 + 2x\%}{4+2} \rightarrow 90 \times 6 = 540 = 344 + 2x \rightarrow x = \frac{540-344}{2} = 98\% \text{ ตอบ } \mathbf{98\%}$$

9. กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $4x - 3y + 10 = 0$

และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$

ถ้า L_2 ขนานกับ L_1 แล้ว ระยะห่างระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 เท่ากับเท่าใด

$$\text{ความชันของเส้นตรง} = \frac{4}{3} = \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{8}{3} \quad \therefore x = \frac{\frac{4}{3} + \frac{8}{3}}{2} = 2 \rightarrow y(2) = 2^2 - \frac{8}{3}(2) + \frac{7}{3} = 1 \text{ ดังนั้นจุดสัมผัสคือที่ } (2,1)$$

$$\text{ระยะห่างระหว่างจุดสัมผัส กับ เส้นตรงที่กำหนด } d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(2)-3(1)+10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|8-3+10|}{5} = 3 \text{ ตอบ } \mathbf{3 \text{ หน่วย}}$$

10. $\int_0^2 6x|x-2| dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$\int_0^2 6x|x-2| dx = \int_0^2 (12x - 6x^2) dx = 6x^2 - 2x^3 \Big|_0^2 = 6(4) - 2(8) = 8$$

11. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ถ้า $x-1$, $x-2$ และ $x-3$ ต่างก็หาร $P(x)$

แล้วเหลือเศษ 1 และ $x-4$ หาร $P(x)$ ลงตัว แล้ว $P(5)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3
2. -1
3. 0
4. 1
5. 3

วิธีทำ

$$p(x)-1=A(x-1)(x-2)(x-3)=A(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$p(x)=A(x^3-6x^2+11x-6)+1$$

$$p(4)=0=A(4^3-6\times 4^2+11\times 4-6)+1=A(64-96+44-6)+1=6A+1\rightarrow A=-\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$p(x)=-\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)+1\rightarrow p(5)=-\frac{1}{6}(125-150+55-6)+1=-\frac{24}{6}+1=-3$$

ตอบข้อ 1

12. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมี $\text{Im}(z) > 0$ และสอดคล้องกับสมการ

$$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} \text{ แล้ว } z^8 \text{ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้}$$

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
2. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
3. $\frac{1}{2}$
4. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
5. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} \rightarrow z + \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \frac{1}{2}i \text{ แต่จากโจทย์ } \text{Im}(Z) > 0 \text{ ดังนั้น } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\angle\frac{5\pi}{6}$$

$$z^8 = 1\angle\frac{40\pi}{6} = 1\angle 6\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ตอบข้อ 5.}$$

13. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $ab - 25a - 25b = 1575$

ถ้า ห.ร.ม. $(a, b) = 5$ แล้ว $|a - b|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15
2. 45
3. 90
4. 210
5. 435

วิธีทำ

5 เป็น ห.ร.ม. ของเลข 2 จำนวน a, b ฉะนั้นให้ $a = 5k, b = 5l$ จะได้

$$1575 = ab - 25a - 25b = 25kl - 125k - 125l \rightarrow 63 = kl - 5k - 5l = (k - 5)(l - 5) - 25 \rightarrow$$

$$(k - 5)(l - 5) = 63 + 25 = 88 = 11 \times 8 \rightarrow k = 16, l = 13 \rightarrow a = 80, b = 65$$

เช็คคำตอบ

$$ab - 25a - 25b = 80 \times 65 - 25 \times 80 - 25 \times 65 = 1575 \quad \text{ok}$$

$$a - b = 80 - 65 = 15 \quad \text{ตอบข้อ 1}$$

14. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์สามมิติซึ่งทำมุมป้านต่อกัน และพื้นที่ของรูป

สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุมเป็น $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีค่าเท่ากับ 3 ตารางหน่วย

ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีขนาด 1 และ 5 หน่วย ตามลำดับแล้ว

$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -27
2. -19
3. 0
4. 19
5. 27

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = 1 \times 5 \sin \theta = 5 \sin \theta = 3 \rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5} \rightarrow \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{4}{5} \quad \text{มุมป้านค่า } \cos \theta \text{ เป็นลบ}$$

$$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 2|\vec{u}|^2 - |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta - |\vec{v}|^2 = 2(1)^2 - 1(5) \left(-\frac{4}{5}\right) - 5^2 = 2 + 4 - 25 = -19$$

ตอบข้อ 2

15. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$

ถ้า E เป็นวงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของ H และมีความเยื้องศูนย์กลาง

เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ แล้ว E คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

2. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

3. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$

4. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$

5. $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 9 \times 16 - 16 \times 1 = 16 + 144 - 16$$

$$9(x-4)^2 - 16(y+1)^2 = 144 \rightarrow \frac{(x-4)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

ดังนั้น H=Hyperbola มีศูนย์กลางอยู่ที่ (4,-1) แกนสมมาตรอยู่บนแกน X มีความยาว $a=4$, และ $b=3$

$$\text{ความยาวโฟกัส } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

E เป็นวงรี มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของ H ดังนั้น $a=5$ และมีศูนย์กลางอยู่ที่เดียวกัน ที่จุด (4,-1)

$$\text{รูปสมการ E: } \frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = \frac{(x-4)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ความเยื้องศูนย์กลางของ E คือ } e = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \rightarrow e^2 = \frac{1}{5} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$b^2 = \frac{4}{5}a^2 = \frac{4}{5}5^2 = 20 \text{ ดังนั้นสมการของ E: } \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1 \text{ ตอบข้อ 3}$$

16. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม A และมุม B เป็นมุมแหลม

ถ้า $\cos 2A + 3\cos 2B = -2$ และ $\cos A - \sqrt{2}\cos B = 0$

แล้ว $\cos C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2. $\frac{1}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

3. $\frac{1}{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$

4. $\frac{1}{5}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

5. $\frac{1}{5}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$



วิธีทำ

$$-2 = \cos 2A + 3\cos 2B = (2\cos^2 A - 1) + 3(2\cos^2 B - 1) = (4\cos^2 B - 1) + 6\cos^2 B - 3 = 10\cos^2 B - 4 \rightarrow$$

$$10\cos^2 B - 2 = 0 \rightarrow \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \cos A = \sqrt{2}\cos B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\cos C = \cos[180 - (A + B)] = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{1 - \frac{2}{5}} \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad \text{ตอบข้อ 3}$$

17. ถ้า x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ $2x + y + 2z = a$

$$x + y - z = b$$

$$3x + 2y - 2z = c$$

โดยที่ดีเทอร์มิแนนต์ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 24$

แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4

2. $-\frac{4}{5}$

3. 0

4. $\frac{4}{5}$

5. 4

$$24 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (4c - 4a - 4b) + (4a - 8b + 2c) = -12b + 6c \rightarrow -2b + c = 4$$

$$AX = B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 3 + 4) + (-6 + 4 + 2) = -3$$

จะหาเฉพาะค่า x ใช้การแทนที่ column แรกของ A จะง่ายสุด

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 1 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a - c + 4b + (-2c + 2a + 2b)}{-3} = \frac{6b - 3c}{-3} = -2b + c = 4 \quad \text{ตอบข้อ 5}$$

18. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และ $AX_i = B_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

$$\text{ถ้า } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8
2. $-\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{8}$
4. 1
5. 8

$$AX = B$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \rightarrow A = X^{-1} \rightarrow |A| = |X^{-1}| = \frac{1}{|X|}$$

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 + 0 + (-10 - 15 + 0) = -8 \rightarrow |A| = |X^{-1}| = \frac{1}{|X|} = -\frac{1}{8} \quad \text{ตอบข้อ 2}$$

19. ถ้า $S_1 = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(9x-3) \leq 0\}$

และ $S_2 = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } -10 \leq x \leq 10\}$

แล้ว $S_1 \cap S_2$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 6
3. 7
4. 8
5. 9

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(9x-3) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}(x+2)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(9x-3)$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(9x-3) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(x+2)}{9x-3} \leq 0 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\geq 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{(x+1)(x+2)}{9x-3} \geq 1 \quad \text{จะได้ } \frac{(x+1)(x+2)}{9x-3} \geq 1 \quad x^2 + 3x + 2 \geq 9x - 3 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \geq 0$$

ดังนั้น $S_1 = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$ แต่เรามีเงื่อนไข $\log y$ ที่ $y > 0$ นั่นคือ $x+1 > 0, x+2 > 0, 9x-3 > 0$ สรุปคือ $x > \frac{1}{3}$

ดังนั้น ภายใต้เงื่อนไขเพิ่มเติม $S_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right] \cup [5, \infty)$ จะได้ $S_1 \cap S_2 = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ มีสมาชิก 7 จำนวน ตอบข้อ 3

20. ในการจัดเด็ก 7 คนซึ่งมีอายุ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ขวบ นั่งเก้าอี้ 7 ตัวซึ่งติด
หมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 โดยกำหนดให้เด็กที่จะนั่งเก้าอี้หมายเลข k ต้องมี
อายุมากกว่าหรือเท่ากับ $k - 1$ ขวบ จะมีจำนวนวิธีในการจัดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 32
 2. 60
 3. 64
 4. 120
 5. 128

วิธีทำ

เริ่มจาก

เด็กอายุ 7 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 6 หรือ 7 ได้ รวม		2 วิธี
เด็กอายุ 6 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 5,6 หรือ 7 ได้ แต่หมายเลข 6 หรือ 7 โดนยึดไป 1 ตัว จึงเหลือ เพียง		2 วิธี
เด็กอายุ 5 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 4,5,6 หรือ 7 ได้ แต่หมายเลข 5 - 7 โดนยึดไป 2 ตัว จึงเหลือ เพียง		2 วิธี
เด็กอายุ 4 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 3,4,5,6 หรือ 7 ได้ แต่หมายเลข 4 - 7 โดนยึดไป 3 ตัว จึงเหลือ เพียง		2 วิธี
เด็กอายุ 3 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 2,3,4,5,6 หรือ 7 ได้ แต่หมายเลข 3 - 7 โดนยึดไป 4 ตัว จึงเหลือ เพียง		2 วิธี
เด็กอายุ 2 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 1,2,3,4,5,6 หรือ 7 ได้ แต่หมายเลข 2 - 7 โดนยึดไป 5 ตัว จึงเหลือ เพียง		2 วิธี
เด็กอายุ 1 ปี จะนั่งเก้าอี้ หมายเลข 1,2,3,4,5,6 หรือ 7 ได้ แต่หมายเลข 1 - 7 โดนยึดไป 6 ตัว จึงเหลือ เพียง		1 วิธี
ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่เด็กทั้ง 7 คนจะนั่งได้	$= 2^6 \times 1 = 64$ วิธี	ตอบ ข้อ 3

21. ข้อมูลชุดหนึ่งเป็นคะแนนจากการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ถ้าเพิ่มคะแนนให้นักเรียนทุกคนๆละ 3 คะแนน แล้วจะทำให้ค่าสถิติในข้อใดต่อไปนี้มีค่าลดลง

1. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของคะแนน
2. สัมประสิทธิ์ของพิสัยของคะแนน
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนน
4. ค่ามัธยฐานของคะแนน
5. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน

1. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(X_i + 3) - (\bar{X} + 3)| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$ เท่าเดิม ผิด

2. สัมประสิทธิ์พิสัยใหม่ $= \frac{X_{new_max} - X_{new_min}}{X_{new_max} + X_{new_min}} = \frac{(X_{max} + 3) - (X_{min} + 3)}{(X_{max} + 3) + (X_{min} + 3)} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min} + 6} < \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$ ถูก

3. ค่าเฉลี่ย $\bar{X}_{new} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + 3) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + 3 = \bar{X} + 3$ เพิ่มขึ้น ผิด

4. มัธยฐาน และตำแหน่งต่างๆเรียงตามเดิมเพราะเพิ่มเท่าๆกันหมด ไม่เปลี่ยน ผิด

5. $S_{new}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(X_i + 3) - (\bar{X} + 3)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S^2 \rightarrow S$ คงเดิม ผิด

ตอบข้อ 2.

22. น้ำหนักของถุงซึ่งบรรจุอาหารขายส่งของบริษัทแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ

ถ้าถุงที่มีน้ำหนักเกิน 117.8 กรัม มีอยู่ 67% และถุงที่มีน้ำหนักเกิน 126.7 กรัม

มีอยู่ 9% แล้ว จำนวนเปอร์เซ็นต์ของถุงที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 125 กรัม

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ โดยกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติดังนี้

Z	0.17	0.44	1	1.1	1.2	1.34
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.4554	0.1700	0.3413	0.3643	0.3849	0.41

1. 84.13

2. 86.43

3. 88.49

4. 89.25

5. 90

$$\frac{117.8 - \bar{X}}{S} = -0.44 \quad (1)$$

$$\frac{126.7 - \bar{X}}{S} = 1.34 \quad (2)$$

$$\frac{126.7 - 117.8}{S} = 1.78 \quad (2) - (1)$$

$$(2) \rightarrow S = \frac{8.9}{1.78} = 5 \rightarrow \bar{X} = 126.7 - 1.34 \times 5 = 120$$

ตำแหน่งข้อมูล 125 คำนวณจาก

$$\frac{125 - \bar{X}}{S} = \frac{125 - 120}{5} = 1 = Z \text{ จากจุดที่กลางได้ พื้นที่ } 0.3413 \text{ คิดรวมจากครั้งแรกจะได้}$$

$$0.5 + 0.3413 = 0.8413 = 84.13\% \text{ ตอบข้อ 1}$$

23. พาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานกับแกน Y มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(3, 9)$

และผ่านจุด $(1, 5)$ บริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลาแบบนี้ และแกน X

มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 ตารางหน่วย
2. 18 ตารางหน่วย
3. 27 ตารางหน่วย
4. 36 ตารางหน่วย
5. 54 ตารางหน่วย

จากรูปสมการทั่วไปของ พาราโบลาที่แกนสมมาตรขนานกับแกน Y คือ

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) = (x-3)^2 = 4p(y-9)^2 \text{ แทนค่าจุดผ่าน}(1,5)\text{จะได้}$$

$$(1-3)^2 = 4p(5-9) = 4 = 4p(-4) \rightarrow p = -\frac{1}{4} \text{ ดังนั้นสมการคือ } (x-3)^2 = -(y-9) \text{ จัดรูปแบบเป็น } y = -x^2 + 6x$$

เมื่อ $y = 0$ ได้ $x = 0, 6$ และเป็นจุดตัดบนแกน x ของพาราโบลาว่า

$$\text{ดังนั้น } \int_0^6 y dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \Big|_0^6 = -\frac{1}{3}6^3 + 3(6^2) = 36 \text{ ตอบข้อ 4.}$$

24. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งมีจุด $(2, -1)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

และกราฟของ g ผ่านจุด $(1, 4)$

ถ้า c เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} (cx^2 + 1)g(x) & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 2x + 10 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8
2. -4
3. 0
4. 4
5. 8

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2cx(g(x) + x^2 \frac{d}{dx} g(x))$$

$$\frac{d}{dx} f(2) = 2c2g(2) + c2^2 \frac{d}{dx} g(2) = 4c(-1) + 4c(0) = -4c$$

คำนวณหาค่า C ที่จะทำให้ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x=1$ จาก $\frac{d}{dx} f(x) = 2cx(g(x) + x^2 \frac{d}{dx} g(x))$

$$\frac{d}{dx} f(2) = 2c2g(2) + c2^2 \frac{d}{dx} g(2) = 4c(-1) + 4c(0) = -4c$$

$$f(1) = (c(1)^2 + 1)g(1) = 2(1) + 10 = (c + 1)4 = 12 \rightarrow c = \frac{12}{4} - 1 = 2$$

$$\frac{d}{dx} f(2) = -4c = -4(2) = -8 \quad \text{ตอบข้อ 1}$$

$$25. \text{ ถ้า } a_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

แล้ว $\sum_{k=1}^{40} a_k$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---------|---------|
| 1. 860 | 2. 1060 |
| 3. 1080 | 4. 1240 |
| 5. 1440 | |

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = (1 + 3 + 5 + \dots + 39) + 2(2 + 4 + 6 + \dots + 40)$$

$$= 20 \times \frac{1+39}{2} + 2 \times 20 \times \frac{2+40}{2} \quad \text{ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต = จำนวนพจน์ x ค่าเฉลี่ยของพจน์แรกกับพจน์สุดท้าย}$$

$$= 20 \times 20 + 40 \times 21 = 400 + 840 = 1240 \quad \text{ตอบข้อ 4}$$

26. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงและ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

$\det(A - \sqrt{2} I)(A - \sqrt{3} I)(A - \sqrt{5} I)(A - \sqrt{7} I)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $48 - 13a$
2. $(a - \sqrt{2})(a - \sqrt{3})(a - \sqrt{5})(a - \sqrt{7})$
3. $17a$
4. 17
5. 48

$$\begin{aligned} & |A - \sqrt{2}I| |A - \sqrt{3}I| |A - \sqrt{5}I| |A - \sqrt{7}I| \\ &= [(2 - a^2) + (a^2 - 1)][(3 - a^2) + (a^2 - 1)][(5 - a^2) + (a^2 - 1)][(7 - a^2) + (a^2 - 1)] \\ &= 1 \times 2 \times 4 \times 6 = 48 \end{aligned}$$

ตอบ ข้อ 5

27. กำหนดให้ E_n เป็นวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a_n^2} + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$

โดยที่ $a_n = 2b_n \geq 0$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

ถ้า $a_1 = 2$ และ จุดยอดของวงรี E_n เป็นจุดโฟกัสของวงรี E_{n-1} ทุก $n \geq 2$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6 + 4\sqrt{3}$
2. $8 + 4\sqrt{3}$
3. $10 + 4\sqrt{3}$
4. 15
5. 17

วิธีทำ

$$a_1 = 2, b_1 = \frac{a_1}{2} = 1$$

$$a_2 = c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 2 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} + \dots = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 2 \times \frac{1-r^\infty}{1-r} = \frac{2}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{4-3} = 4(2+\sqrt{3})$$

ตอบข้อ 2

28. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $f(x) = x|x+1|$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

2. $f(x) = \frac{x}{|x+1|}$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

3. $f(x) = |x|(x+1)$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

4. $f(x) = x^2|x+1|$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

5. $f(x) = x|x|$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

$f(x), f'(x) =$ $x=0+$	$f'(0^+)$	$f(x), f'(x) =$ $x=0-$	$f'(0^-)$
1. $x(x+1), 2x+1 =$	1	$x(x+1), 2x-1 =$	1
2. $\frac{x}{(x+1)}, \frac{1}{(x+1)^2} =$	1	$\frac{x}{(x+1)}, \frac{1}{(x+1)^2} =$	-1
3. $x(x+1), 2x+1 =$	1	$-x(x+1), -2x-1 =$	-1
4. $x^2(x+1), 3x^2+2x =$	0	$-x^2(x+1), -3x^2-2x =$	0
5. $x^2, 2x =$	0	$-x^2, -2x =$	0

จากตารางการคำนวณอนุพันธ์ของข้อต่างๆข้างบนนี้จะเห็นได้ว่า $f'(0^+)$ และ $f'(0^-)$ มีค่าต่างกันเฉพาะข้อ 3 คือ 1 และ -1 จึงถือว่าไม่สามารถมีค่าอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$ ตอบข้อ 3

29. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $a_1, a_2, \dots, a_{91}$

$$\text{โดยที่ } a_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 3 + 4n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$$

มัธยฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 63
2. 68
3. 71
4. 74
5. 76

วิธีทำ จากการทดลองพบว่าเริ่มจำนวนพจน์เท่ากับ 7 ซึ่งเป็นเลขคี่ซึ่งได้ มัธยฐานเป็นพจน์ที่ 1 ซึ่งมีค่า $= 3 + 4 \times 1 = 7$

(ตัวอย่างการจัดเรียงตำแหน่งพจน์กรณี 7 พจน์ 2,4,6,1,3,5,7 ซึ่งมีค่า 2,4,6,7,15,31 ตามลำดับ)

และพบว่าจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นทุกๆ 10 มัธยฐานจะเป็นพจน์คี่ ในลำดับถัดไป เป็นพจน์ที่ 3, 5, 7, ... ตามลำดับ

ดังนั้นถ้าจำนวนพจน์เป็น $7 + 10 \times 8 = 87$ มัธยฐานจะเป็นพจน์ที่ $1 + 8 \times 2 = 17$ ซึ่งมีค่า $= 3 + 4 \times 17 = 71$

ถ้าเพิ่มจำนวนพจน์อีก 2, หรือ 4 เป็น $87 + 2 = 89$ หรือ $87 + 4 = 91$ ซึ่งเป็นตามที่โจทย์ต้องการ

ก็ต้องเพิ่มพจน์ที่ 88, 89 หรือ 88, 89, 90 และ 91 ซึ่งมีค่าเป็น 88, $3 + 4 \times 89$, 90, $3 + 4 \times 91$ ล้วนมีค่ามากกว่า พจน์ที่ 17(71)

ซึ่งทำให้ตำแหน่งของมัธยฐานก็จะเลื่อนขึ้นไปเป็นลำดับของการจัดเรียงค่าลดหรือเพิ่มขึ้น ครึ่งหนึ่งของจำนวนพจน์ที่ลดหรือเพิ่มขึ้น

สำหรับค่าใกล้เคียงกับพจน์ที่ 17(71) ล้วนเป็นพจน์คู่ โดยมีลำดับพจน์เป็น 70, 17, 72, 74 ดังนั้นถ้า

จำนวนพจน์เป็น 85, 89, และ 91 ตำแหน่งมัธยฐานจะอยู่ที่ พจน์ที่ 70 มีค่าเป็น 70, 72, และ 74 ตามลำดับ

ดังนั้นสำหรับ $a_1, a_2, \dots, a_{91}$ มัธยฐานคือ a_{74} ตอบข้อ 4

30. กำหนดให้ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\} \right\}$

ถ้าผู้เลือกเมทริกซ์หนึ่ง เมทริกซ์จากเซต M แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ที่มีอินเวอร์สการคูณมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{24}{81}$
2. $\frac{31}{81}$
3. $\frac{33}{81}$
4. $\frac{48}{81}$
5. $\frac{50}{81}$

ตัวแปร 4 ตัว คือ a, b, c, d แต่ละตัวมีค่าได้ 3 ค่า ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมด $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ วิธี

ค่า $|M| = ad - bc = 0$ ที่จะทำให้หาค่า อินเวอร์ส ไม่ได้ มี 3 กรณี คือ เมื่อ $ad = bc = -1, 0, 1$

กรณี $ad = bc = -1$ คือกรณีแต่ละคู่เป็น $-1, 1$ หรือ $1, -1$ เป็น 2 วิธี นั่นคือรวม $= 2 \times 2 = 4$ วิธี

กรณี $ad = bc = 0$ คือกรณีแต่ละคู่เป็น $0, 0$ $0, -1$ หรือ $0, 1$ $-1, 0$ $1, 0$ เป็น 5 วิธี นั่นคือ รวม $5 \times 5 = 25$ วิธี

กรณี $ad = bc = 1$ คือกรณีแต่ละคู่เป็น $1, 1$ หรือ $-1, -1$ เป็น 2 วิธี นั่นคือรวม $= 2 \times 2 = 4$ วิธี

รวม 3 กรณีที่ $|M| = ad - bc = 0$ ได้ $4 + 25 + 4 = 33$ วิธี ดังนั้น $|M| = ad - bc \neq 0$ จะมี $81 - 33 = 48$ วิธี

ความน่าจะเป็นที่ M สามารถหา inverse ได้ คือเมื่อ $|M| = ad - bc \neq 0$ ได้เท่ากับ $\frac{48}{81}$ ตอบข้อ 4.